Maple 的應用－以某種指數型函數的微分問題為例子

余啟輝
南榮技術學院通識教育中心
台南市鹽水區朝琴路 178 號
E-mail: chiihuei@mail.njtc.edu.tw

摘要

本篇文章是利用數學軟體Maple做為輔助工具來研究某種指數型函數的微分問題。我們利用二項級數定理和逐項微分定理可以求出此種函數的任意階導函數，因此大大降低了求解它們高階微分值的困難度。另一方面，我們舉出兩個指數型函數實際的來做計算，而這些函數高階微分值的答案都是以無窮級數的型式呈現的。我們採取的研究方式是先用手算把答案求出來，然後利用Maple驗證結果。這樣的方式不僅可以讓我們發現演算錯誤的地方，還可以幫助我們修正原先思考和推論的方向，因為我們可以從手算和Maple計算兩者的一致性驗證我們理論的正確性。因此Maple 可以帶給我們解題的靈感以及指引我們找到解決問題的方法。

***關鍵字**：指數型函數、二項級數定理、逐項微分定理、無窮級數、Maple。*

1. 前言

隨著資訊科技的日新月異，我們不禁要問電腦能不能像人腦一樣可以從事一些抽象的工作？例如畫出像畢卡索一樣偉大的抽象畫，或是寫出像莫札特一樣美妙的音樂作品，顯然這些對目前的電腦科技來說還是非常遙不可及的夢想。同樣對於抽象的數學理論，電腦是不是也能像數學家一樣解決一些既抽象又困難的數學問題？這當然也是一個難以實現的理想，不過我們退而求其次，看看數學軟體可以幫助我們做什麼事情。本篇文章就是介紹如何利用數學軟體Maple從事一些數學的研究，我們選擇Maple的主要理由是因為它的指令簡單而且容易學習，即使是初學者也能在很短的時間內就上手，因此可以讓從事數學和科學研究的人節省許多學習電腦程式語言的時間，將大量的精神投入問題的研究上，這正是Maple比其他軟體優越的地方。另一方面利用Maple強大的計算功能，使我們面對困難的問題比較容易迎刃而解，即使Maple求不出答案，但是我們還是可以從Maple算出的近似值或相似問題的解法看出一些蛛絲馬跡，進而推敲出解決問題的方法，這也就是Maple在科學研究上可以啟發我們靈感的原因。想要對Maple更進一步的認識，可以經由Maple所提供的線上求助系統來查詢，或者到Maple的網站www.maplesoft.com參觀瀏覽，相信會有許多意想不到的收穫；至於Maple的一些指令和使用方法的說明，可以參考 (洪維恩，2000, 2001；Abell & Braselton, 2005；Corless, 1994；Garvan, 2001；Heck, 2003；Richards, 2002)。

在微積分課程裡，要求一個函數 $f(x)$ 在 $x=c$ 的 p 階微分值(p -th order derivative value) $f^{(p)}(c)$ (其中 p 為正整數)，一般而言需要經過兩道手續：首先必須先求出 $f(x)$ 的 p 階導函數 $f^{(p)}(x)$，其次代入 $x=c$ 才能得到。這兩道手續在求高階微分值 (即 p 比較大的情況) 時會面臨計算變得越來越複雜的困境，所以要用手算的方式得到答案可以說是一件非常不容易的事情。面對這一個難題，本篇文章針對指數型函數

(exponential type of functions) $\dfrac{e^{\beta x}}{(a+be^{\lambda x})^q}$ 研究其高階微分值求解問題(其中 a,b,β,λ 為實數且 $a,b,\lambda\neq 0$, q 為正整數)，我們利用二項級數定理 (binomial series theorem) 和逐項微分定理 (differentiation term by term theorem) 可以求出此種函數任意階導函數，也就是本文的主要結果－定理 H，因此大大降低了求解此種函數高階微分值的困難度。同時我們舉出兩個指數型函數的例子實際的來做計算，而這些函數的高階微分值求出來的答案都是以無窮級數的型式呈現的。我們採取的研究方式是先經過手算的過程把答案求出來，然後利用 Maple 驗證我們的結果。這樣的研究方式不僅讓我們隨時發現演算錯誤的地方，還可以幫助我們修正原先思考和推論的方向，因為從手算和 Maple 計算兩者答案的一致性可以驗證我們理論的正確性。所以說 Maple 可以帶給我們解題的靈感以及指引我們找到解決問題的方法，這句話一點也不為過。另一方面，有關 Maple 在其他函數微分問題上的應用可以參考 (余啟輝, 2012a, 2012b, 2012c, 2012d, 2012e, 2012f , 2012g, 2012h, 2012i)。

接著我們簡單的介紹本文所舉出的兩個例子，首先例題(I)我們利用定理 H 可以求出函數 $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{(6+5e^{4x})^3}$ 在 $x=-\dfrac{1}{2}$ 的 8 階微分值 $f^{(8)}\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{e^{-1}}{216}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k[3]_k(4k+2)^8}{k!}\left(\dfrac{5}{6}\right)^k e^{-2k}\cong -470.3781$。以及 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{3}{4}$ 的 12 階微分值 $f^{(12)}\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{e^{-15/2}}{125}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k[3]_k(10+4k)^{12}}{k!}\left(\dfrac{6}{5}\right)^k e^{-3k}\cong 1.2153\cdot 10^6$。其次例題(II)我們利用定理 H 可以很容易計算出函數 $g(x)=\dfrac{e^{6x}}{(3-4e^{2x})^7}$ 在 $x=-1$ 的 13 階微分值 $g^{(13)}(-1)=\dfrac{e^{-6}}{2187}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k[7]_k(2k+6)^{13}}{k!}\left(-\dfrac{4}{3}\right)^k e^{-2k}\cong 6.9086\cdot 10^9$。以及 $g(x)$ 在 $x=1$ 的 16 階微分值 $g^{(16)}(1)=\dfrac{-e^{-8}}{16384}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k[7]_k(-8-2k)^{16}}{k!}\left(-\dfrac{3}{4}\right)^k e^{-2k}\cong -6.9643\cdot 10^{10}$。

2. 主要的理論

接著我們介紹本文中用到的符號和定理：

符號： (i)設 t 為實數且 n 正整數，我們定義 $(t)_n = t(t-1)\cdots(t-n+1)$;而 $(t)_0=1$。

(ii)設 s 為實數且 k 為正整數，我們定義 $[s]_k=s(s+1)\cdots(s+k-1)$;而 $[s]_0=1$。

(iii)函數 $f(x)$ 的 p 次導函數記作 $f^{(p)}(x)$，其中 p 為正整數。

二項級數定理(Apostol, 1975, p244)：設 a 為任意實數，u 為實數且 $|u|<1$，則 $(1+u)^a=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(a)_k}{k!}u^k$。

逐項微分定理(Apostol, 1975, p230)：如果對所有正整數 k，函數 $f_k:(a,b)\to R$ 滿足以下三個條件：(1)存在一點 $x_0\in(a,b)$ 使得 $\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x_0)$ 收斂，(2)每個 f_k 在 (a,b) 都可微分，(3) $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{d}{dx}f_k(x)$ 在 (a,b) 上均勻收斂。則 $\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ 在 (a,b) 上均勻收斂且可微分，而且其微分 $\dfrac{d}{dx}\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{d}{dx}f_k(x)$。

以下是本文的主要結果，我們求出指數型函數 $\dfrac{e^{\beta x}}{(a+be^{\lambda x})^q}$ 的任意階導函數：

定理 H：設 p,q 都是正整數，a,b,β,λ 為實數且 $a,b,\lambda\neq 0$,設函數 $f(x)=\dfrac{e^{\beta x}}{(a+be^{\lambda x})^q}$ 的定義域為 $\left\{x\in R \middle| e^{\lambda x}\neq\left|\dfrac{a}{b}\right|\right\}$。(a)若 $e^{\lambda x}<\left|\dfrac{a}{b}\right|$，則 $f(x)$ 的 p 階導函數 $f^{(p)}(x)=\dfrac{e^{\beta x}}{a^q}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k[q]_k(\lambda k+\beta)^p}{k!}\left(\dfrac{b}{a}\right)^k e^{\lambda kx}$，(b)若 $e^{\lambda x}>\left|\dfrac{a}{b}\right|$，則 $f(x)$ 的 p 階導函數 $f^{(p)}(x)=\dfrac{e^{(\beta-\lambda q)x}}{b^q}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k[q]_k(\beta-\lambda q-\lambda k)^p}{k!}\left(\dfrac{a}{b}\right)^k e^{-\lambda kx}$。

證明: (a) 若 $e^{\lambda x}<\left|\dfrac{a}{b}\right|$，則 $\left|\dfrac{b}{a}e^{\lambda x}\right|<1$，所以

$$
\begin{aligned}
f(x)&=\frac{e^{\beta x}}{(a+be^{\lambda x})^q}\\
&=\frac{1}{a^q}e^{\beta x}\left(1+\frac{b}{a}e^{\lambda x}\right)^{-q}\\
&=\frac{1}{a^q}e^{\beta x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-q)_k}{k!}\left(\frac{b}{a}e^{\lambda x}\right)^k \quad \text{(利用二項級數定理)}\\
&=\frac{1}{a^q}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k[q]_k}{k!}\left(\frac{b}{a}\right)^k e^{(\lambda k+\beta)x},
\end{aligned}
$$

利用逐項微分定理得到 $f(x)$ 的 p 階導函數 $f^{(p)}(x)=\dfrac{e^{\beta x}}{a^q}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k[q]_k(\lambda k+\beta)^p}{k!}\left(\dfrac{b}{a}\right)^k e^{\lambda kx}$。

(b)若 $e^{\lambda x}>\left|\dfrac{a}{b}\right|$，則 $\left|\dfrac{a}{b}e^{-\lambda x}\right|<1$，因此

$$
\begin{aligned}
f(x)&=\frac{e^{\beta x}}{(a+be^{\lambda x})^q}\\
&=\frac{1}{b^q}e^{(\beta-\lambda q)x}\left(1+\frac{a}{b}e^{-\lambda x}\right)^{-q}\\
&=\frac{1}{b^q}e^{(\beta-\lambda q)x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-q)_k}{k!}\left(\frac{a}{b}e^{-\lambda x}\right)^k \quad \text{(利用二項級數定理)}\\
&=\frac{1}{b^q}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k[q]_k}{k!}\left(\frac{a}{b}\right)^k e^{(\beta-\lambda q-\lambda k)x},
\end{aligned}
$$

利用逐項微分定理得到 $f(x)$ 的 p 階導函數 $f^{(p)}(x)=\dfrac{e^{(\beta-\lambda q)x}}{b^q}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k[q]_k(\beta-\lambda q-\lambda k)^p}{k!}\left(\dfrac{a}{b}\right)^k e^{-\lambda kx}$ ■

3. 例子說明

以下我們針對本文所研究的指數型函數的微分問題，舉出兩個例子實際的利用定理 H 來求這些函數的高階微分值，並且利用 Maple 驗證我們的答案：

例題(I)： 假設函數 $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{(6+5e^{4x})^3}$ 的定義域為 $\left\{x\in R \middle| e^{4x}\neq\dfrac{6}{5}\right\}$，(i)若 $e^{4x}<\dfrac{6}{5}$，即 $x<\dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{6}{5}\right)\cong 0.0456$。由定理 H 的 (a) 得到 $f(x)$的 p 階導函數 $f^{(p)}(x)=\dfrac{e^{2x}}{216}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k[3]_k(4k+2)^p}{k!}\left(\dfrac{5}{6}\right)^k e^{4kx}$，因此我們可以求出 $f(x)$ 在 $x=-\dfrac{1}{2}$ 的 8 階微分值 $f^{(8)}\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{e^{-1}}{216}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k[3]_k(4k+2)^8}{k!}\left(\dfrac{5}{6}\right)^k e^{-2k}$。接著我們利用 Maple 算出 $f^{(8)}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$和它的無窮級數解的近似值來驗證答案：

```
>f:=x->exp(2*x)/(6+5*exp(4*x))^3;
```

$$f:=x\to\frac{e^{2x}}{(6+5e^{4x})^3}$$

```
>evalf((D@@8)(f)(-1/2),20);
```

$$-470.37813827021711165$$

```
>evalf(exp(-1)/216*sum((-1)^k*product(3+i,i=0..k-1)*(4*k+2)^8/k!*(5/6)^k*exp(-2*k),k=0..infinity),20);
```

$$-470.37813827021711176$$

(ii)若 $e^{4x}>\dfrac{6}{5}$，即 $x>\dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{6}{5}\right)\cong 0.0456$。由定理 H 的(b)我們得到函數 $f(x)$的 p 階導函數 $f^{(p)}(x)=\dfrac{e^{-10x}}{125}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k[3]_k(-10-4k)^p}{k!}\left(\dfrac{6}{5}\right)^k e^{-4kx}$，所以可以求出 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{3}{4}$ 的 12 階微分值 $f^{(12)}\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{e^{-15/2}}{125}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k[3]_k(10+4k)^{12}}{k!}\left(\dfrac{6}{5}\right)^k e^{-3k}$。我們再利用 Maple 算出 $f^{(12)}\left(\dfrac{3}{4}\right)$ 及其無窮級數解的近似值來印證答案：

```
>evalf((D@@12)(f)(3/4),30);
```

$$1.21535959889879422394551\cdot 10^6$$

```
>evalf(exp(-15/2)/125*sum((-1)^k*product(3+i,i=0..k-1)*(10+4*k)^12/k!*(6/5)^k*exp(-3*k),k=0..infinity),25);
```

$$1.215359598898794223945612\cdot 10^6$$

例題(II)： 假設函數 $g(x)=\dfrac{e^{6x}}{(3-4e^{2x})^7}$ 的定義域為 $\left\{x\in R \middle| e^{2x}\neq\dfrac{3}{4}\right\}$，(i)若 $e^{2x}<\dfrac{3}{4}$，即 $x<\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{3}{4}\right)\cong -0.1438$。由定理 H 的(a)得到 $g(x)$的 p 階導函數 $g^{(p)}(x)=\dfrac{e^{6x}}{2187}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k[7]_k(2k+6)^p}{k!}\left(-\dfrac{4}{3}\right)^k e^{2kx}$，所以

我們可以求出 $g(x)$ 在 $x=-1$ 的 13 階微分值 $g^{(13)}(-1)=\frac{e^{-6}}{2187}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k[7]_k(2k+6)^{13}}{k!}\left(-\frac{4}{3}\right)^k e^{-2k}$。以下我們利用 Maple 算出 $g^{(13)}(-1)$ 及其無窮級數解的近似值來檢驗答案：

>g:=x->exp(6*x)/(3-4*exp(2*x))^7;

$$g:=x\rightarrow\frac{e^{6x}}{\left(3-4\,e^{2x}\right)^7}$$

>evalf((D@@13)(g)(-1),20);

$$6.9086112595485503719\cdot10^{9}$$

>evalf(exp(-6)/2187*sum((-1)^k*product(7+i,i=0..k-1)*(2*k+6)^13/k!*(-4/3)^k*exp(-2*k),k=0..infinity),20);

$$6.9086112595485503694\cdot10^{9}$$

(ii) 若 $e^{2x}>\frac{3}{4}$，即 $x>\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{4}\right)\cong-0.1438$。利用定理 H 的(b) 我們得到 $g(x)$ 的 p 階導函數 $g^{(p)}(x)=\frac{-e^{-8x}}{16384}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k[7]_k(-8-2k)^p}{k!}\left(-\frac{3}{4}\right)^k e^{-2kx}$，於是可以求出 $g(x)$ 在 $x=1$ 的 16 階微分值 $g^{(16)}(1)=\frac{-e^{-8}}{16384}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k[7]_k(-8-2k)^{16}}{k!}\left(-\frac{3}{4}\right)^k e^{-2k}$。同樣利用 Maple 算出 $g^{(16)}(1)$ 及其無窮級數解的近似值來檢驗答案：

>evalf((D@@16)(g)(1),30);

$$-6.96434607372648203985420398542\cdot10^{10}$$

>evalf(-exp(-8)/16384*sum((-1)^k*product(7+i,i=0..k-1)*(-8-2*k)^16/k!*(-3/4)^k*exp(-2*k),k=0..infinity),30);

$$-6.964346073726482039854600368 23\cdot10^{10}$$

4. 結論

由以上兩個例子可以知道定理 H 是求解本文所探討的指數型函數微分問題的主要理論依據，並且我們看到二項級數定理和逐項微分定理在我們理論推導中佔有舉足輕重的地位。事實上這兩個定理的應用非常廣泛，許多困難的問題利用它們都可以迎刃而解，我們會陸續發表這方面的論文。另一方面我們看到 Maple 在輔助解題上扮演著重要的角色，事實上我們可以利用 Maple 來設計一些函數的微分問題，並且試著從中找到解決問題的關鍵。未來我們會將觸角延伸到其他困難的積分問題的研究上，並且利用 Maple 發展出新的方法來解決這些問題。

參考文獻

余啟輝 (2012a)。Maple 的應用－以兩種函數的導函數閉合型式解求法為例子。WCE 2012 民生電子研討

會，虎尾科技大學 (被接受)。

余啟輝 (2012b)。Maple 的應用ー以有理函數的微分問題為例子。2012 光電與通訊工程研討會，高雄應用科技大學。

余啟輝 (2012c)。Maple 的應用－以兩種特別函數的微分問題為例子。MC2012 第十七屆行動計算研討會，長庚大學、交通大學。

余啟輝 (2012d)。Maple 的應用－以求解某種類型有理函數的高階微分值為例子。DLT2012 數位生活科技研討會，雲林科技大學、成功大學，150-153。

余啟輝 (2012e)。Maple 的應用－以三角函數的高階微分值求解問題為例子。ICSSMET2012 安全管理工程技術國際研討會，吳鳳科技大學，469-473。

余啟輝 (2012f)。Maple 在雙曲函數微分問題上的應用。ICSSMET 2012 安全管理與工程技術國際研討會，吳鳳科技大學，481-484。

余啟輝 (2012g)。Maple 在求函數高階微分值問題上的應用。ICIM2012 第 23 屆國際資訊管理學術研討會，高雄大學，MS0287。

余啟輝 (2012h)。Maple 的應用－以正弦和餘弦函數的微分問題為例子。屏東台東澎湖地區大專校院第五屆通識教育聯合學術通識課程發展學術研討會，永達技術學院，197-207。

余啟輝 (2012i)。Maple 的應用ー以一些周期函數的微分問題為例子。IETAC 2012 第五屆資訊教育與科技應用研討會，中台科技大學，D3:11-16。

洪維恩 (2000)。*Maple 在微積分之應用－基礎篇*。台北市：五南圖書出版公司。

洪維恩 (2001)。*數學魔法師 Maple 6* (第二版)。台北市：碁峰資訊公司。

Abell, M. L., & Braselton, J. P. (2005). *Maple by example* (3rd ed.). London：Elsevier Academic Press.

Apostol, T. M. (1975). *Mathematical analysis* (2nd ed.). Massachusetts：Addison-Wesley Publishing Co., Inc.

Corless, R. M. (1994). *Essential Maple*. New York：Springer-Verlag.

Garvan, F. (2001). *The Maple book*. Florida：Chapman & Hall/CRC.

Heck, A. (2003). *Introduction to Maple* (3rd ed.). New York：Springer-Verlag.

Richards, D. (2002). *Advanced mathematical methods with Maple*. Cambridge：Cambridge University Press.

Application of Maple－Taking the Differential Problem of Some Exponential Type of Functions as an Example

Chii-Huei Yu

Center of General Education, Nan Jeon Institute of Technology

E-mail: chiihuei@mail.njtc.edu.tw

ABSTRACT

This article uses the mathematical software Maple for the auxiliary tool to study the differential problem of some exponential type of functions. We can obtain any order derivatives of this type of functions using binomial series theorem and differentiation term by term theorem, and hence reducing the difficulty of evaluating their higher order derivative values greatly. On the other hand, we propose two exponential type of functions to do calculation practically, and the answers of the higher order derivative values of these functions are presented in infinite series forms. Our research way is to count the answers by hand, and then using Maple to verify the results. This way can not only let us find the calculation errors but also help us to revise the original thinking and reasoning direction because we can verify the correctness of our theory from the consistency of hand count and Maple calculations. Therefore, Maple can bring us inspiration and guide us to find the problem-solving method.

Keywords: *exponential type of functions, binomial series theorem, differentiation term by term theorem, infinite series, Maple.*