兩種多重瑕積分的求解問題

余啟輝
南榮技術學院通識教育中心
台南市鹽水區朝琴路 178 號
E-mail：chiihuei@mail.njtc.edu.tw

摘要

本篇論文利用數學軟體 Maple 做為輔助工具來求解兩種類型多重瑕積分。我們可以求出這兩種多重瑕積分的閉合型式解，因此大大降低了問題的困難度。另一方面，我們舉出兩個多重瑕積分的例子實際的來做計算。我們採取的研究方式是先用手算把答案求出來，然後利用 Maple 驗證我們的結果。這樣的研究方式不僅讓我們發現演算錯誤的地方，還可以幫助我們修正原先思考和推論的方向，因為我們可以從手算和 Maple 計算兩者答案的一致性驗證我們理論的正確性。所以 Maple 可以帶給我們解題的靈感以及指引我們找到解決問題的方法。

***關鍵字**：多重瑕積分、閉合型式解、Maple*。

1. 前言

電腦代數系統(Computer Algebra System，簡稱CAS)已經廣泛應用在數學和科學的研究上，藉由電腦的快速運算與美麗親和的介面，讓數學和科學的研究增加了無限的想像力。而數學軟體Maple可以說是CAS領域裡的翹楚，它在數學運算系統中佔有舉足輕重的地位。Maple這套軟體的優越性在於它的指令簡單而容易學習，可以讓從事數學和科學研究的人節省許多學習電腦程式語言的時間，將大部分的精神投入問題的研究上。另一方面透過Maple強大的計算能力，使我們面對困難的問題比較容易迎刃而解，即使Maple算不出答案，但是我們還是可以從Maple求出的近似值或相似問題的解法看出一些蛛絲馬跡，進而推敲出解決問題的方法，這正是Maple在科學研究上可以啟發我們靈感的原因。想要對Maple更進一步的認識，可以利用Maple的線上查詢系統或者前往Maple的網站www.maplesoft.com參觀瀏覽，相信會有許多豐富的收穫;至於Maple的一些指令和使用方法的說明，可以參考(洪維恩，2000 & 2001; Abell & Braselton, 2005; Corless, 1994; Garvan, 2001; Heck, 2003; Richards, 2002) 。

在微積分的課程裡有關多重積分(multiple integrals)問題的研究是一項重要的課題，例如求曲面的面積、立體的體積以及薄板的質心位置等問題都需要利用到多重積分，所以無論是多重積分的求解或數值計算都有其重要性，這方面的介紹可以參考(Lang, 1983, chap.19; Widder, 1961, chap. 6)。本篇論文研究

$$\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty \exp\left(\sum_{k=1}^n a_k x_k\right)\cos\left(\sum_{k=1}^n b_k x_k + c\right)dx_1\cdots dx_n \quad 和 \quad \int_0^\infty\cdots\int_0^\infty \exp\left(\sum_{k=1}^n a_k x_k\right)\sin\left(\sum_{k=1}^n b_k x_k + c\right)dx_1\cdots dx_n$$

這兩種多重瑕積分(multiple improper integrals)的求解問題，其中 n 為任意正整數， a_k, b_k, c 皆為實數且 $a_k < 0$，對所有 $k = 1,2,\cdots,n$。我們可以求出這兩種多重瑕積分的閉合型式解，也就是本文兩個主要的結果－定理1和定理2，因此大大降低了求解問題的困難度。另一方面，我們舉出兩個多重瑕積分的例子實際的來做計算。我們採取的研究方式是先經過手算的過程把答案求出來，然後利用Maple 驗證我們的結

果，這種方式在研究上有很大的好處，不僅讓我們隨時發現演算錯誤的地方，還可以幫助我們修正原先思考和推論的方向，因為從我們手算得到的結果和Maple計算得到的答案兩者的一致性就可以驗證我們理論的正確性，所以說Maple可以帶給我們解題的靈感以及指引我們找到解決問題的方法，這句話一點也不為過。另一方面有關Maple在其他積分問題上的應用可以參考(余啟輝，2012a, 2012b, 2012c, 2012d, 2012e, 2012f, 2012g, 2012h, 2012i, 2012j, 2012k, 2012l)。

接著我們簡單的介紹本文所舉出的兩個多重瑕積分的例子，首先例題 1 我們研究二重瑕積分 $\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\exp(-2x_1-3x_2)\cos\left(\frac{1}{3}x_1-\frac{4}{5}x_2+\frac{\pi}{3}\right)dx_1dx_2$ 的求解問題，利用定理 1 可以求出它的答案為 $\frac{1410+135\sqrt{3}}{17834}\cong 0.09217$。其次例題 2 我們利用定理 2 可以求出三重瑕積分 $\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}x_1-\frac{5}{6}x_2-\frac{7}{4}x_3\right)\sin\left(-\frac{1}{4}x_1+\frac{1}{3}x_2-\frac{5}{2}x_3-\frac{3\pi}{4}\right)dx_1dx_2dx_3=\frac{2544\sqrt{2}}{21605}\cong 0.1665$。

2. 主要的理論

首先介紹本文用到的符號、公式和定理：

符號：(i)設複數 $z=a+ib$，其中 a,b 為實數，$i=\sqrt{-1}$。我們將 z 的實部 a 記作 $\mathrm{Re}(z)$，虛部 b 記作 $\mathrm{Im}(z)$。

(ii) $\prod_{k=1}^{n}p_k=p_1\times p_2\times\cdots\times p_n$。

尤拉公式 (Euler's formula)**:** $e^{ix}=\cos x+i\sin x$，其中 x 為任意實數。

引理：假設 a,b 為實數且 $a<0$，則瑕積分 $\int_0^{\infty}\exp[(a+ib)x]dx=\frac{-(a-ib)}{a^2+b^2}$。

證明: $\int_0^{\infty}\exp[(a+ib)x]dx=\frac{1}{a+ib}\exp[(a+ib)x]\Big|_0^{\infty}=\frac{-1}{a+ib}=\frac{-(a-ib)}{a^2+b^2}$ ■

接著是本文第一個主要的結果，我們求出某種類型多重瑕積分的閉合型式解：

定理 1：假設 n 為任意正整數，a_k,b_k,c 皆為實數且 $a_k<0$，對所有 $k=1,2,\cdots,n$。則 n 重瑕積分

$$\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}\exp\left(\sum_{k=1}^{n}a_kx_k\right)\cos\left(\sum_{k=1}^{n}b_kx_k+c\right)dx_1\cdots dx_n=\frac{(-1)^n}{\prod_{k=1}^{n}(a_k{}^2+b_k{}^2)}\mathrm{Re}\left[\exp(ic)\cdot\prod_{k=1}^{n}(a_k-ib_k)\right]。$$

證明：因為 $\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}\exp\left(\sum_{k=1}^{n}a_kx_k\right)\cos\left(\sum_{k=1}^{n}b_kx_k+c\right)dx_1\cdots dx_n$

$$=\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}\mathrm{Re}\left[\exp\left(\sum_{k=1}^{n}a_kx_k\right)\cdot\exp\left[i\left(\sum_{k=1}^{n}b_kx_k+c\right)\right]\right]dx_1\cdots dx_n \quad \text{(利用尤拉公式)}$$

$$= \mathrm{Re}\left[\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \exp\left(\sum_{k=1}^n (a_k + ib_k)x_k + ic\right)dx_1 \cdots dx_n\right]$$

$$= \mathrm{Re}\left[\exp(ic)\cdot\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \prod_{k=1}^n \exp[(a_k + ib_k)x_k]dx_1 \cdots dx_n\right]$$

$$= \mathrm{Re}\left[\exp(ic)\cdot\prod_{k=1}^n \int_0^\infty \exp[(a_k + ib_k)x_k]dx_k\right]$$

$$= \mathrm{Re}\left[\exp(ic)\cdot\prod_{k=1}^n \frac{-(a_k - ib_k)}{{a_k}^2 + {b_k}^2}\right] \quad \text{(利用引理)}$$

$$= \frac{(-1)^n}{\prod_{k=1}^n ({a_k}^2 + {b_k}^2)}\mathrm{Re}\left[\exp(ic)\cdot\prod_{k=1}^n (a_k - ib_k)\right] \qquad \blacksquare$$

其次是本文第二個主要的結果，我們推導出另外一種類型多重瑕積分的閉合型式解：

定理 2：和定理 1 相同的假設。則 n 重瑕積分 $\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \exp\left(\sum_{k=1}^n a_k x_k\right)\sin\left(\sum_{k=1}^n b_k x_k + c\right)dx_1 \cdots dx_n$

$$= \frac{(-1)^n}{\prod_{k=1}^n ({a_k}^2 + {b_k}^2)}\mathrm{Im}\left[\exp(ic)\cdot\prod_{k=1}^n (a_k - ib_k)\right]$$ 。

證明：和定理 1 相同的證明方式，我們得到

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \exp\left(\sum_{k=1}^n a_k x_k\right)\sin\left(\sum_{k=1}^n b_k x_k + c\right)dx_1 \cdots dx_n$$

$$= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \mathrm{Im}\left[\exp\left(\sum_{k=1}^n a_k x_k\right)\cdot\exp\left[i\left(\sum_{k=1}^n b_k x_k + c\right)\right]\right]dx_1 \cdots dx_n \quad \text{(利用尤拉公式)}$$

$$= \frac{(-1)^n}{\prod_{k=1}^n ({a_k}^2 + {b_k}^2)}\mathrm{Im}\left[\exp(ic)\cdot\prod_{k=1}^n (a_k - ib_k)\right] \qquad \blacksquare$$

3. 例子說明

以下針對本文所研究的兩種多重瑕積分問題，舉出兩個例子分別利用定理 1 和定理 2 來求解，並且我們利用 Maple 驗證答案的正確性。首先我們探討二重瑕積分的問題：

例題 1. 利用定理 1 我們可以求出二重瑕積分

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \exp(-2x_1 - 3x_2)\cos\left(\frac{1}{3}x_1 - \frac{4}{5}x_2 + \frac{\pi}{3}\right)dx_1 dx_2$$

$$= \frac{1}{\left(4+\frac{1}{9}\right)\left(9+\frac{16}{25}\right)} \operatorname{Re}\left[\exp\left(i\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(-2-\frac{1}{3}i\right)\left(-3+\frac{4}{5}i\right)\right]$$

$$= \frac{225}{8917}\cdot\frac{94+9\sqrt{3}}{30}$$

$$= \frac{1410+135\sqrt{3}}{17834} \ ,$$

接著我們利用 Maple 算出此二重瑕積分及其解的近似值來驗證答案：

>evalf(Doubleint(exp(-2*x1-3*x2)*cos(x1/3-4*x2/5+Pi/3),x1=0..infinity,x2=0..infinity));

0.09217376130

>evalf((1410+135*sqrt(3))/17834,14);

0.092173761299865

其次我們研究三重瑕積分的求解問題：

例題 2： 利用定理 2 我們可以得到三重瑕積分

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}x_1 - \frac{5}{6}x_2 - \frac{7}{4}x_3\right)\sin\left(-\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{5}{2}x_3 - \frac{3\pi}{4}\right)dx_1 dx_2 dx_3$$

$$= \frac{-1}{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\right)\left(\frac{25}{36}+\frac{1}{9}\right)\left(\frac{49}{16}+\frac{25}{4}\right)} \operatorname{Im}\left[\exp\left(-\frac{3\pi}{4}i\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}i\right)\left(-\frac{5}{6}-\frac{1}{3}i\right)\left(-\frac{7}{4}+\frac{5}{2}i\right)\right]$$

$$= \frac{-9216}{21605}\cdot\left(-\frac{53\sqrt{2}}{192}\right)$$

$$= \frac{2544\sqrt{2}}{21605} \ ,$$

接著利用 Maple 算出此三重瑕積分及其解的近似值來檢驗我們的答案：

>evalf(Tripleint(exp(-x1/2-5*x2/6-7*x3/4)*sin(-x1/4+x2/3-5*x3/2-3*Pi/4),x1=0..infinity,x2=0..infinity,x3=0..infinity));

0.1665243834

```
>evalf(2544*sqrt(2)/21605,14);
```

0.16652438336854

4. 結論

由上面的兩個例子可以知道定理1和定理2是求解本文所探討的兩種多重瑕積分問題的主要理論依據，並且我們看到Maple在輔助解題上扮演著重要的角色，我們甚至可以利用Maple來設計一些多重瑕積分問題，並且試著從中找到解決問題的關鍵。未來我們會繼續將觸角延伸到多變數函數的偏微分問題上，並且利用Maple發展出新的方法來解決這些問題。

參考文獻

余啟輝 (2012a)。Maple 的應用－以兩種二重積分的求解問題為例子。SAE2012 中華民國第十七屆車輛工程學術研討會，中華民國自動機工程學會、南開科技大學(被接受)，I-015。

余啟輝 (2012b)。Maple 在多重瑕積分問題上的應用。2012 光電與通訊工程研討會，高雄應用科技大學，275-280 頁。

余啟輝 (2012c)。Maple 的應用－以 Fourier 級數求解二重積分為例子。ISC2012 第六屆智慧型系統工程應用研討會，遠東科技大學，H2-6。

余啟輝 (2012d)。多重瑕積分的求解問題。國立屏東科技大學 101 學年度通識教育學術研討會，屏東科技大學，1-7 頁。

余啟輝 (2012e)。Maple 的應用－以參數微分法求解定積分問題為例子。NST2012 全國電信研討會，彰化師範大學(被接受) 。

余啟輝 (2012f)。Maple 在某種類型瑕積分問題上的應用。WCE2012 民生電子研討會，虎尾科技大學(被接受)。

余啟輝 (2012g)。Maple 在求解瑕積分問題上的應用。2012 數位與科技生活創新應用學術研討會，創新技術學院。

余啟輝 (2012h)。Maple 的應用－以兩種特殊的積分問題為例子。KC2012 第八屆知識社群國際研討會，中國文化大學，803-811 頁。

余啟輝 (2012i)。Maple 的應用－以積分問題為例子。2012 數位科技與創新管理研討會，華梵大學，A74。

余啟輝 (2012j)。Maple 在一些積分問題上的應用。ICSSMET2012 安全管理與工程技術國際研討會，吳鳳科技大學，290-294 頁。

余啟輝 (2012k)。參數微分法在積分問題上的應用。2012 南榮通識教育學術研討會，南榮技術學院，157-165 頁。

余啟輝 (2012l)。Maple 在求解兩種積分問題上的應用。第九屆服務業管理與創新學術研討會，南台科技大學。

洪維恩 (2001)。*數學魔法師 Maple 6*。第二版，台北市：碁峰資訊公司。

洪維恩 (2000)。*Maple 在微積分之應用－基礎篇*。台北市：五南圖書公司。

Abell, M. L. and Braselton, J. P. (2005). *Maple by example.* 3rd ed., London：Elsevier Academic Press.

Apostol, T. M. (1975). *Mathematical analysis.* 2nd ed., Massachusetts：Addison-Wesley Publishing Co., Inc.

Corless, R. M. (1994). *Essential Maple.* New York：Springer-Verlag.

Garvan, F. (2001). *The Maple book*. Florida：Chapman & Hall/CRC.
Heck, A. (2003). *Introduction to Maple*, 3rd ed., New York：Springer-Verlag.
Lang, S. (1983). *Undergraduate analysis*, Undergraduate Text in Mathematics, New York：Springer-Verlag.
Richards, D. (2002). *Advanced mathematical methods with Maple.* Cambridge：Cambridge University Press.
Widder, D. V. (1961). *Advanced calculus* (2nd ed.), Englewood Cliffs, N. J.：Prentice-Hall, Inc.

The Evaluation of Two Types of Multiple Improper Integrals

Chii-Huei Yu
Center of General Education, Nan Jeon Institute of Technology
E-mail: chiihuei@mail.njtc.edu.tw

ABSTRACT

This paper uses the mathematical software Maple for the auxiliary tool to evaluate two types of multiple improper integrals. We can obtain the closed forms of these two types of multiple improper integrals, and hence reducing the problem difficulty greatly. On the other hand, we propose two multiple improper integrals to do calculation practically. Our research way is to count the answers by hand, and then using Maple to verify our results. This research way can not only let us find the calculation errors but also help us to revise the original thinking and reasoning direction because we can verify the correctness of our theory from the consistency of hand count and Maple calculations. Therefore, Maple can bring us inspiration and guide us to find the problem-solving method.

Keywords: *multiple improper integrals*, *closed forms, Maple*.