

自調適四元樹數值水槽之建立

陳怡吟 蔡加正*

國立高雄海洋科技大學海洋環境工程系暨研究所(高雄市楠梓區海專路 142 號)

*tsaichiacheng@mail.nkmu.edu.tw

摘要

本研究利用自調適四元樹網格與流體體積計算法之數值模式，建立二維黏性數值造波水槽。模擬波浪受結構物之影響，研究波浪變形與生成，並將模擬結果分別與Ohyama等人(1994)所採用的邊界元素法(BEM)、Beji和Battjes(1994)之實驗量測及Huang和Dong(1999)之有限解析法(FA)進行模式驗證的分析比較，以驗證本模式之適用性。驗證結果顯示，本模式與Beji和Battjes(1994)學者所模擬出來之實驗值整體趨勢相當吻合，整體而言比其它數值方法所模擬出來之結果更準確。預期未來研究將加入不同形狀之底床，探討波浪受不同形狀結構物的影響變化，也將對於其物理特性做更深入研究。

關鍵字：自調適四元樹網格、流體體積法、數值水槽。

1. 前言

台灣四面環海，為一個海島型國家，每年常遭受到颱風暴潮之影響，海水倒灌之現象，因此對於海岸的防護措施相當嚴謹，以往海岸結構物通常都以防波堤、突堤、離岸堤等結構物來做海岸防護。此結構物主要是在保護近岸地區海岸線免受浪潮之侵蝕與直接衝擊破壞，同時也保護附近地區之居民與生態環境；因此波浪受結構物之影響變化，為未來所探討之著重趨勢。

近年來有許多專家學者採用實驗水槽以及數值水槽做為預測波浪通過結構物，波浪變形之生成研究，實驗水槽的部份由於比較占空間，在建造成本的部份相對於較數值水槽為高，加上實驗水槽於量測波浪變化，受外在因素影響較高，所以比較難以去控制。因此近年來有許多專家學者，如 Ohyama 等人(1994)、Huang 和 Dong(1999)、黃(2012)等專家學者，以不同數值方法針對數值造波水槽之研究。

本研究主要是應用自調適四元樹網格與流體體積計算法建立二維數值水槽，模擬波浪通過結構物所產生之波浪變形與生成機制，將與前人研究結果做驗證，做為本模式驗證之適用性。本研究所採用的自調適四元樹網格數值之方法，國內學者採用此方法則較為少數，因此本研究將初步探討四元樹網格法，此方法比其它數值方法在計算方面不但可提升效率，節省計算時間，也能夠更精細的達到預測波浪變化數據之準確性。

2. 理論分析

2.1 控制方程式

不可壓縮，不同密度，Navier-Stokes 方程式可寫成

$$\rho(\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{D}) \quad (1)$$

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3)$$

其中， $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ 為流體在各方向速度， $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ 為流體密度， $\mu = \mu(\mathbf{x}, t)$ 為動力黏滯係數。 \mathbf{D} 為變形張量，定義為

$$D_{ij} = (\partial_i u_j + \partial_j u_i) / 2 \quad (4)$$

如果在網格的中心，有兩項流體，可以引入體積比 $c(\mathbf{x}, t)$ ，而密度和黏性則分別定義為

$$\rho = c\rho_1 + (1-c)\rho_2 \quad (5)$$

$$\mu = c\mu_1 + (1-c)\mu_2 \quad (6)$$

因此，密度的對流方程可取代成

$$\partial_t c + \nabla \cdot (c\mathbf{u}) = 0 \quad (7)$$

數值計算的目標是求解 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ， $c(\mathbf{x}, t)$ 和 $p(\mathbf{x}, t)$ 由方程式(1)，(3)，(7)所控制之。

2.2 時間離散與投影法

使用交錯法時間微分離散，方程式(1)，(3)，(7)可分別改寫為

$$\rho^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} \right) = -\nabla p^{n+\frac{1}{2}} + \nabla \cdot \left(\mu^{n+\frac{1}{2}} (\mathbf{D}^{n+1} + \mathbf{D}^n) \right) \quad (8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{c^{n+\frac{1}{2}} - c^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \nabla \cdot (c^n \mathbf{u}^n) = 0 \quad (10)$$

使用傳統的分步時間投影法(time-splitting projection method)，此方法最初是由 Chorin 所提出，該系統可以進一步的做簡化

$$\rho^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} \right) = \nabla \cdot \left(\mu^{n+\frac{1}{2}} (\mathbf{D}^n + \mathbf{D}^*) \right) \quad (11)$$

$$\frac{c^{n+\frac{1}{2}} - c^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \nabla \cdot (c^n \mathbf{u}^n) = 0 \quad (12)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \frac{\Delta t}{\rho^{n+\frac{1}{2}}} \nabla p^{n+\frac{1}{2}} \quad (13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \quad (14)$$

結合(13)、(14)式得到以下的純量波以松方程(Scalar Poisson equation)

$$\nabla \cdot \left(\frac{\Delta t}{\rho^{n+\frac{1}{2}}} \nabla p^{n+\frac{1}{2}} \right) = \nabla \cdot \mathbf{u}^* \quad (15)$$

在實際的執行過程中，(11)式與(12)式通常分別改寫為

$$\nabla \cdot \left(\mu^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{D}^* \right) - \rho^{n+\frac{1}{2}} \frac{\mathbf{u}^*}{\Delta t} = - \left(\nabla \cdot \left(\mu^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{D}^n \right) + \rho^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{\mathbf{u}^n}{\Delta t} - \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} \right) \right) \quad (16)$$

$$c^{n+\frac{1}{2}} = c^{n-\frac{1}{2}} - \Delta t \nabla \cdot (c^n \mathbf{u}^n) \quad (17)$$

其中(16)式為向量荷姆茲方程式(Vector Helmholtz equation)。

求解 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ， $c(\mathbf{x}, t)$ 和 $p(\mathbf{x}, t)$ 與輔助變數 ρ 、 μ ，可參照(13)、(15)、(16)、(17)式與輔助方程式(5)、(6)，其求解步驟如圖 1 所示。

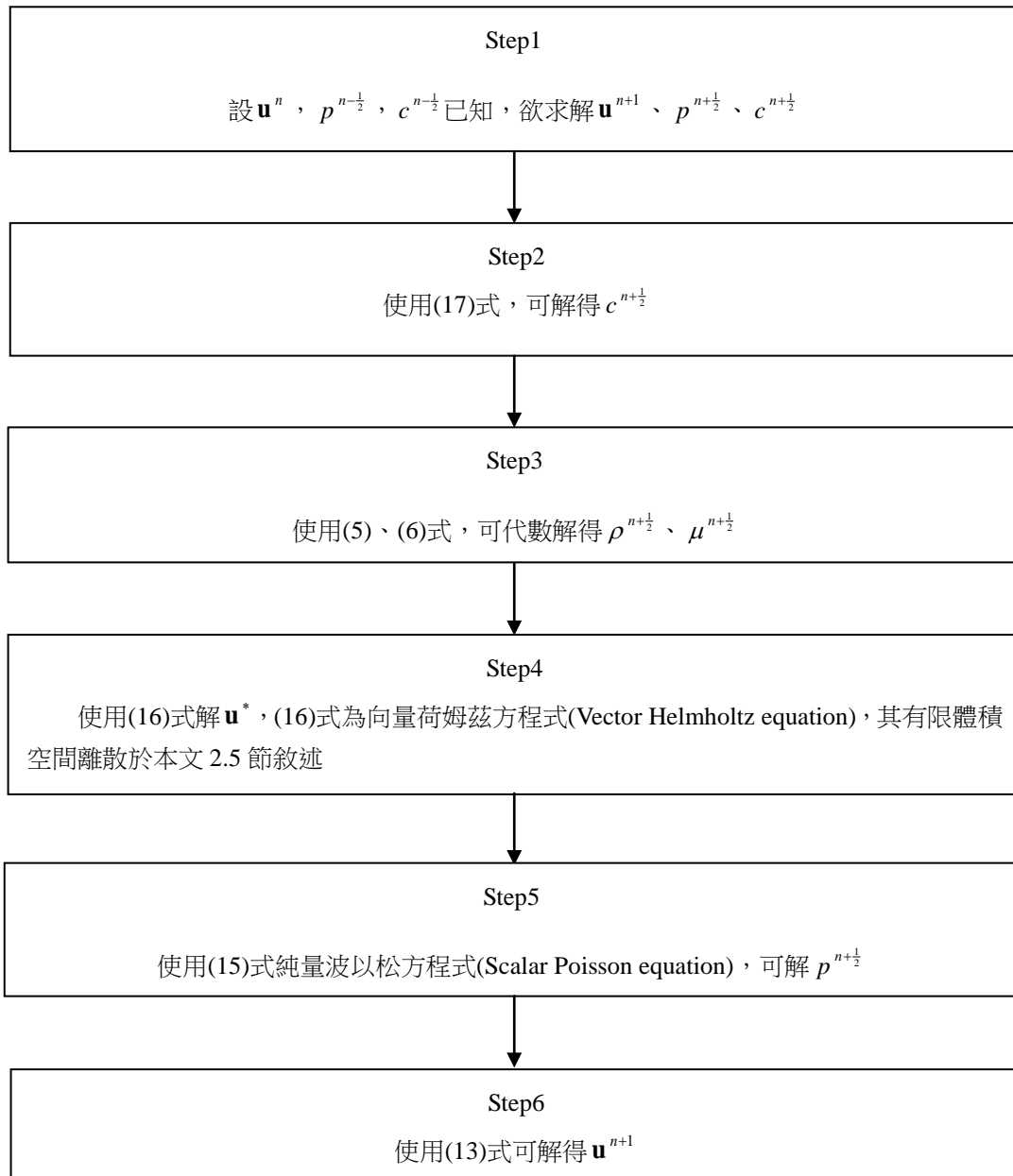


圖 1 $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$, $c(\mathbf{x},t)$ 和 $p(\mathbf{x},t)$ 求解流程圖

2.3 空間離散

在求解 \mathbf{u}^n 、 $c^{n-\frac{1}{2}}$ 、 $p^{n-\frac{1}{2}}$ 等數值模式，全部的數值則是在網格中心(cell center)的質點上求解，如圖 2 黑點所示。

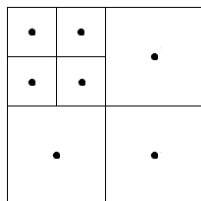


圖 2 網格中心(cell-center)示意圖

區域的空間離散則是利用正方形(二維)或立方體(三維)有限體積組織分層為八元樹(二維為四元樹)。這種離散型態已廣泛用於圖像處理和計算圖形學的應用與研究，本文則會進一步應用於納維爾-斯托克斯方程式(Navier-Stokes equation)的求解。空間離散的例子與相對應的樹狀結構如圖 3 所示。

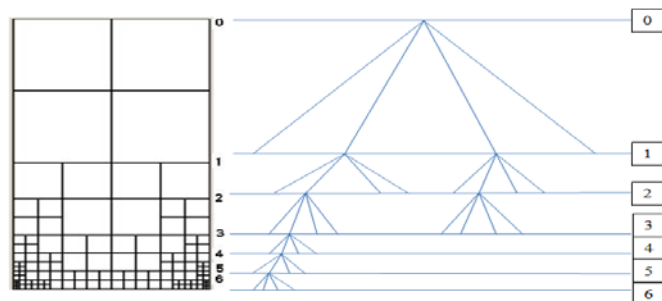


圖 3 四元樹網格(圖左)，為不同階度的網格，沿著邏輯樹狀結構(圖右)也稱為樹突(dendrite)

接下來，將介紹八元樹網格，為一個有限體積三維問題的離散化。網格邊長以 h 來表示。每個網格父節點可能高達八個子節點。網格階度的定義是由根節點從零開始，再由子節點的增加，每次增加一組八個子孫節點。根節點是基於樹，葉節點網格則表示沒有再分出任何的子節點。每個網格在同一個階度的每個方向都有直接相鄰與對角相鄰。換句話說，在三維的情況下，有六個直接相鄰與八個對角相鄰。

2.4 純量波以松方程式的有限體積解

本節說明圖 1(Step5)，即求解純量波以松方程式(Scalar Poisson equation)，因此我們可以將(15)式改寫為

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \phi) = \nabla \cdot \mathbf{u}^* \quad (18)$$

其中 $\sigma = \frac{\Delta t}{\rho^{n+\frac{1}{2}}}$ 與 \mathbf{u}^* 為已知，欲求 $\phi = p^{n+\frac{1}{2}}$

為了以下方便敘述起見，我們用二維來說明，三維的狀況也類似。其邊界條件為

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} \quad \text{on } \partial \Omega \quad (19)$$

兩邊都對單一有限體積積分

$$\int \nabla \cdot (\sigma \nabla \phi) dV = \int \nabla \cdot \mathbf{u}^* dV \quad (20)$$

利用散度定理得到

$$\rho \int \sigma \nabla \phi \cdot \mathbf{n} dS = \int \nabla \cdot \mathbf{u}^* dV \quad (21)$$

離散化變成

$$\sum_d s_d (\sigma_d^{edge} \nabla_d \phi) h = h^2 a \nabla \cdot \mathbf{u}^* \quad (22)$$

其中 a 表示為體積比， h 為邊長， s_d 為邊界之體積比； σ_d^{edge} 為在 d 方向上之邊的 σ 平均值。

事實上，梯度運算的建立必須考慮四種情況；在計算中主要是求解網格中心(cell center)轉移到邊緣中心(edge center)值的過程，其求解過程則需要使用內插程序，如圖 4、圖 5 所示。

情況一(圖 4 (a))，假設 $x_d = 0$ 為 d 方向上之邊的座標值，則 ϕ 之內差可表示為

$$\phi = \frac{\phi_d - \phi_c}{h} x_d + \frac{\phi_c + \phi_d}{2} \quad (23)$$

各個方向邊上之微分為

$$\nabla_d \phi = \frac{\phi_d - \phi_c}{h} \quad (24)$$

(23)式中，若 ϕ 以 σ 替代，其邊上之平均值為

$$\sigma_d^{edge} = \frac{\sigma_c + \sigma_d}{2} \quad (25)$$

情況二(圖 4(b))， ϕ_c 需要經過上下之內插程序，參考圖 5 敘述說明；其求解(圖 4(b))時，為了維持二階準度，可利用二次方程式 $\phi = ax_d^2 + bx_d + c$ 代入可解 a 、 b 、 c 值。

內插程序為

$$\phi = \left(\frac{2(2\phi_6 - 5\phi_c - 3\phi_d)}{15h^2} \right) x_d^2 + \left(-\frac{8\phi_6 + 5\phi_c + 3\phi_d}{15h} \right) x_d + \left(\frac{1}{5} (\phi_6 + 5\phi_c - \phi_d) \right) \quad (26)$$

對 x 微分為

$$h\nabla_d\phi = h\left(-\frac{-8\phi_6 + 5\phi_c + 3\phi_d}{15h}\right) \quad (27)$$

(26)式中，若 ϕ 以 σ 替代，其邊上之平均值為

$$\sigma_d^{edge} = \frac{1}{5}(\sigma_6 + 5\sigma_c - \sigma_d) \quad (28)$$

情況三：(圖 4(c))，圖左 ϕ_7 、 σ_7 中間節點計算值之獲得，可由(上方值+下方值)/2 之簡單計算皆可求得，與(圖 4(a))求解類似，而其 ϕ_6 求解過程如同情況二(圖 4(b))。

情況四：(圖 4(d))值之計算，等同於圖 6(a、b)相加除以二再變號，如圖 6 所示。

前述提到 ϕ_6 需要經過上下之內插程序，其求解情況一如圖 5(a)所示，其內插結果如下

$$\phi = \left(\frac{2(\phi_3 + \phi_4 - 2\phi_d)}{9h^2}\right)x_{\perp d}^2 + \left(-\frac{5\phi_3 + \phi_4 + 4\phi_d}{9h}\right)x_{\perp d} + \left(\frac{1}{9}(2\phi_3 - \phi_4 + 8\phi_d)\right) \quad (29)$$

其中 $x_{\perp d} = 0$ 表示 ϕ_6 或 σ_6 所在之座標值，其中 ϕ_6 為

$$\phi_6 = \frac{1}{9}(2\phi_3 - \phi_4 + 8\phi_d) \quad (30)$$

(30)式中，若 ϕ 以 σ 替代

$$\sigma_6 = \frac{1}{9}(2\sigma_3 - \sigma_4 + 8\sigma_d) \quad (31)$$

情況二：(圖 5(b))、情況三：(圖 5(c))、情況四：(圖 5(d))，其內插程序如情況一(圖 5(a))所示。

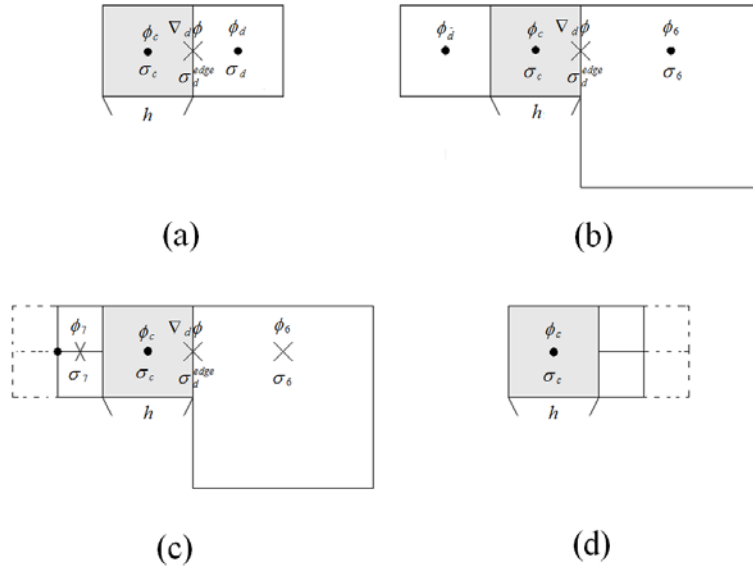


圖 4 四種情況面中心梯度的計算

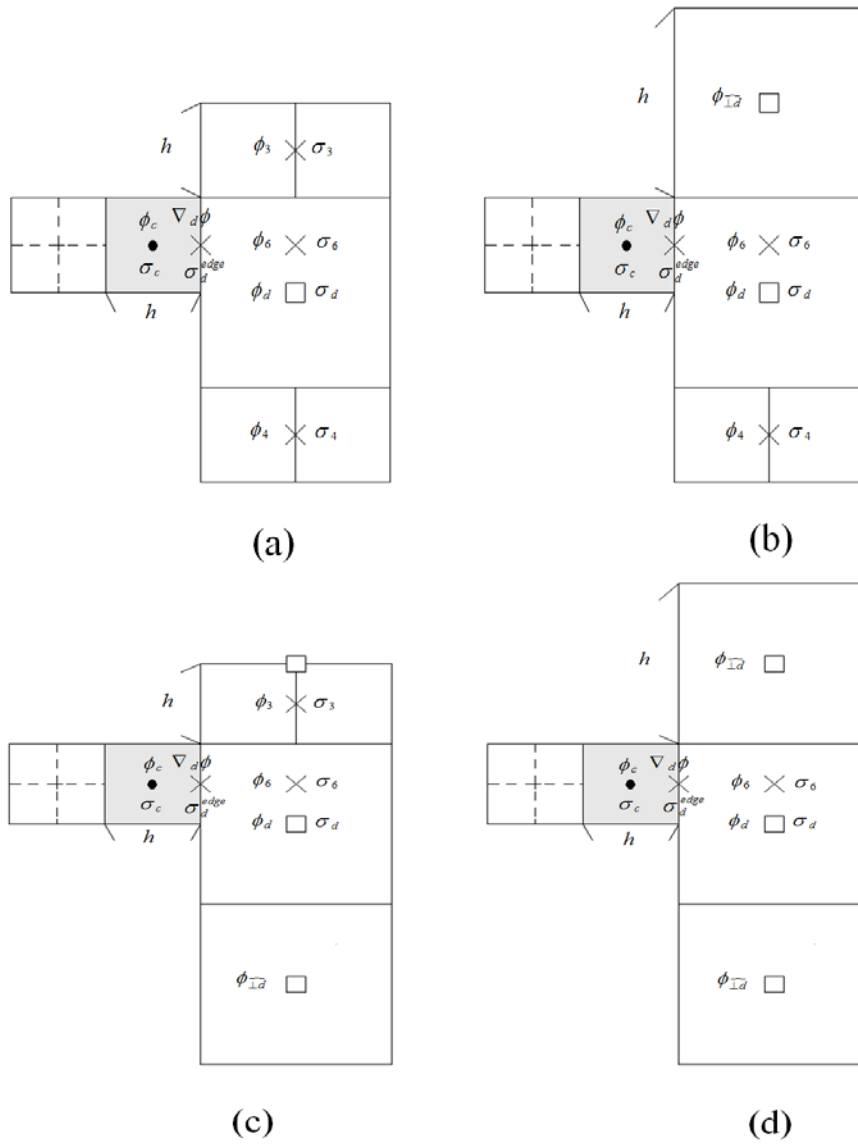


圖 5 (圖 4(b))或(圖 4(c))所細分之內插求解圖

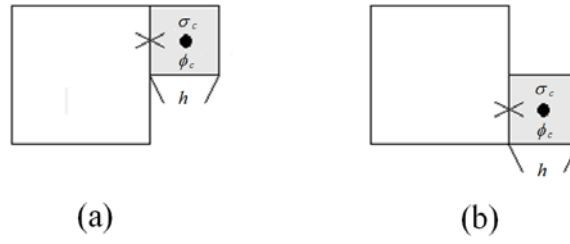


圖 6 (圖 4(d))等於(a)與(b)兩狀況相加除二再變號

2.5 向量荷姆茲方程式的有限體積解

本節說明圖 1(Step4)，即求解向量荷姆茲方程式(Vector Helmholtz equation)，因此我們可以將(16)式改寫為

$$\nabla \cdot \left(\mu^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{D}^* \right) - \rho^{n+\frac{1}{2}} \frac{\mathbf{u}^*}{\Delta t} = \mathbf{f} \quad (32)$$

其中

$$\mathbf{f} = - \left(\nabla \cdot \left(\mu^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{D}^n \right) + \rho^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{\mathbf{u}^n}{\Delta t} - \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} \right) \right) \quad (33)$$

(32)式兩邊都對單一有限體積積分

$$\int \nabla \cdot \left(\mu^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{D}^* \right) - \rho^{n+\frac{1}{2}} \frac{\mathbf{u}^*}{\Delta t} dV = \int \mathbf{f} dV \quad (34)$$

利用散度定理得到

$$\int \mu^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{D}^* \cdot \hat{n} ds - \int \rho^{n+\frac{1}{2}} \frac{\mathbf{u}^*}{\Delta t} dV = \int \mathbf{f} dV \quad (35)$$

參照前面內插之程序 \mathbf{D}_d^* 可寫成

$$\sum_d s_d \left(\mu_d^{n+\frac{1}{2}, edge} \mathbf{D}_d^* \right) h - a \rho_c^{n+\frac{1}{2}} \frac{\mathbf{u}_c^*}{\Delta t} h^2 = a \mathbf{f}_c h^2 \quad (36)$$

其中

$$\mathbf{D}_d^* = \boldsymbol{\alpha}_d \mathbf{u}_c^* + \boldsymbol{\beta}_d \quad (37)$$

其中(37)式 $\boldsymbol{\alpha}_d$ 為 2×2 矩陣，三維為 3×3 矩陣， $\boldsymbol{\beta}_d$ 為二維向量 2×1 矩陣，三維向量為 3×1 矩陣。

則(35)式可離散化成

$$\sum_d \left[s_d \mu_d^{n+\frac{1}{2}, edge} h (\boldsymbol{\alpha}_d \mathbf{u}_c^* + \boldsymbol{\beta}_d) \right] - a \frac{\rho_c^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} h^2 \mathbf{u}_c^* = a \mathbf{f}_c h^2 \quad (38)$$

化減後可得

$$\left(\sum_d s_d \mu_d^{n+\frac{1}{2}, edge} h \boldsymbol{\alpha}_d - a \frac{\rho_c}{\Delta t} h^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{u}_c^* = a \mathbf{f}_c h^2 - \sum_d s_d \mu_d^{n+\frac{1}{2}, edge} h \boldsymbol{\beta}_d \quad (39)$$

或

$$\mathbf{A} \mathbf{u}_c^* = \mathbf{B} \quad (40)$$

則

$$\mathbf{A} = \left(\sum_d s_d \mu_d^{n+\frac{1}{2}, edge} h \boldsymbol{\alpha}_d - a \frac{\rho_c^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} h^2 \mathbf{I} \right) \quad (41)$$

$$\mathbf{B} = a \mathbf{f}_c h^2 - \sum_d s_d \mu_d^{n+\frac{1}{2}, edge} h \boldsymbol{\beta}_d \quad (42)$$

其中 \mathbf{I} 為二乘二之單位矩陣(二維)或三乘三之單位矩陣(三維)，若二維 \mathbf{A} 則為 2×2 矩陣，三維為 3×3 矩陣。

3. 結果與討論

3.1 數值水槽模式配置

本文利用Beji 和Battjes(1994)實驗水槽模式模擬波浪受結構物之影響，我們為了數值計算方便起見，因此將數值水槽原先長度為 37.5 公尺增加到 38.00 公尺，高由 0.75 公尺增加到 0.762 公尺；本模式水槽大小為：長 38.00 公尺，寬 0.8 公尺，高 0.762 公尺；水槽中間擺設梯形潛堤左側斜坡 1：20 與右側斜坡 1：10，高 0.3 公尺之梯形潛堤，末端擺設 1：25 之斜坡，此斜坡主要是用以消除反射波；水槽上端則架設 7 支不同位置之波高計，為量測波浪傳播通過不同位置之波高變化，如圖 7 所示。其波浪入射條件為：靜水深 $h_0=0.4$ 公尺、入射波高 $H_i=0.02$ 公尺、週期 $T=2.0$ 秒。

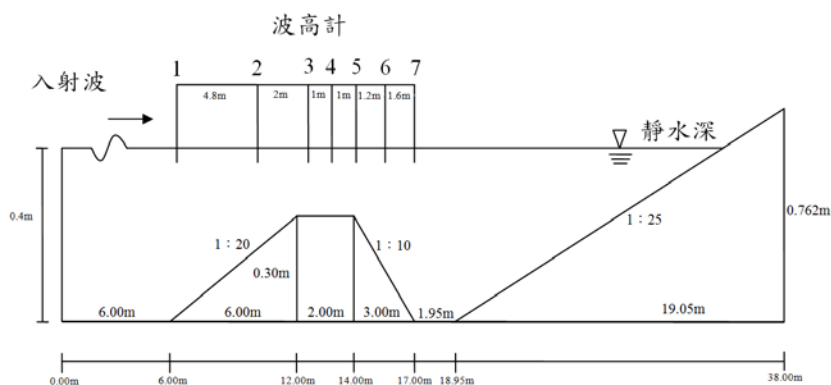
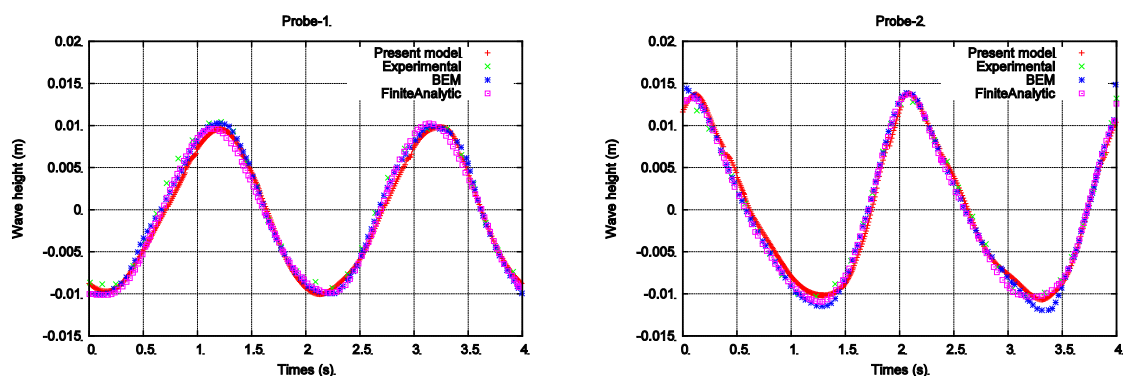


圖 7 Beji 和 Battjes(1994)水槽模型示意圖

3.2 數值模擬驗證結果

為了驗證本模式之適用性，我們首先把第一支波高計數值結果與實驗數據同步之後，取其中二個週期做為實驗與數值模式驗證的分析與比較，如圖 8 (probe-1、probe-2、probe-3、probe-4、probe-5、probe-6) 所示。其驗證結果可明顯看出，波形與實驗數據達到良好的一致性，唯有於潛堤之頂端(probe-3、probe-4)與潛堤右側之下坡段(probe-6)，可明顯的看出波高值略有高估，可能原因為水槽末端 1:25 斜坡所產生之反射波與結構物邊界不完善，造成部分反射波所致。

圖 8 (probe-2)至(probe-4)可以看出，波浪傳播剛好從潛堤之左側上坡段傳播至潛堤之頂端，波浪受到結構物作用而強烈影響變化，波峰逐漸變得陡峭；也因波浪通過潛堤左側上坡段時，波浪由深水傳遞至淺水，會產生所謂的淺化現象，非線性效應增強，因此波高尖銳度明顯增加，產生波浪之分解現象，波高值約 0.01 公尺~0.03 公尺左右；圖 8(probe-6)波高值可以看出，由於波浪從潛堤頂端傳播至潛堤右側下坡段時，波浪由淺水傳遞至深水，波高明顯逐漸降低，波高值小於 0.015 公尺，因高頻波與主頻波之波速不一致，再加上能量消散之影響，因此波形產生大量的變化，相當的不對稱性。



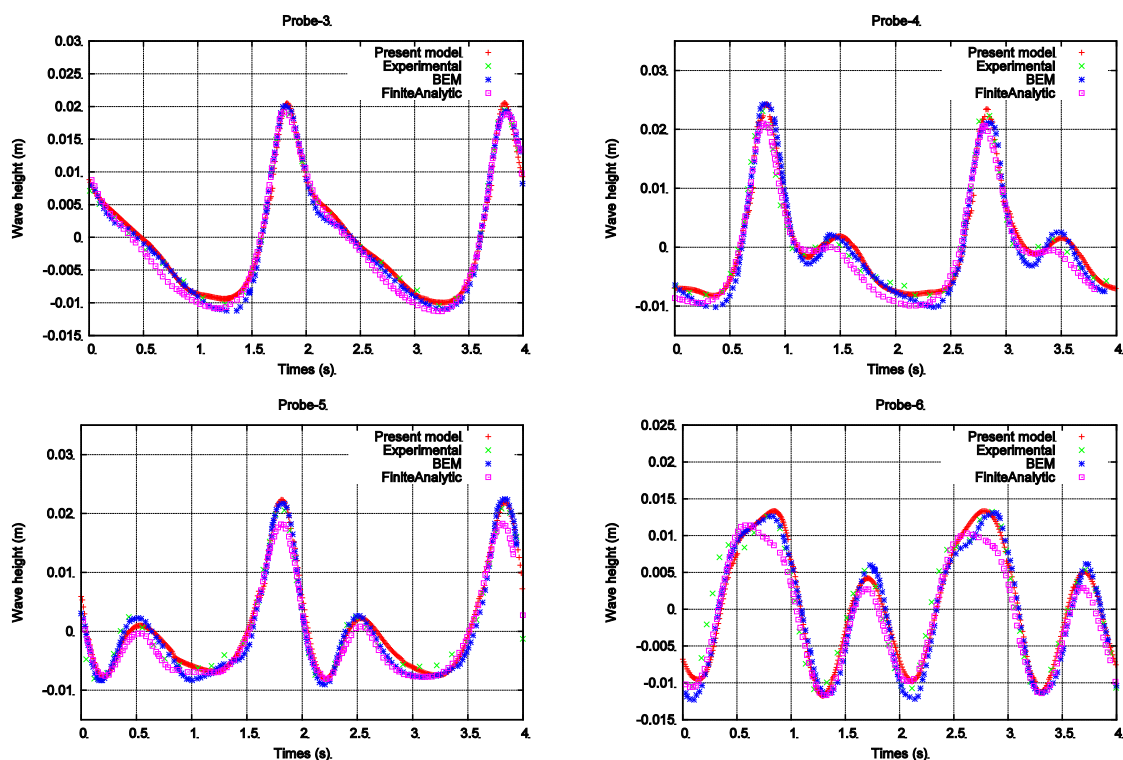


圖 8 波浪通過梯形潛堤之自由液面波高時序列圖；+：VOF(本研究數值模式)；×：實驗數據(Beji and Battjes,1994)；*：BEM (Ohyaama 等人,1994)；□：FA(Huang and Dong,1999)

4. 結論

本文應用自調適四元樹網格與流體體積計算法所建立之二維數值造波水槽，模擬波浪傳播受到結構物之影響變化，將模擬結果與前人研究之實驗數據與數值模式，驗證本模式之適用性。綜合上述研究結果可得知本文所採用之流體體積法(VOF)與實驗數據幾乎達到良好的一致性，比其它數值模式(有限解析法 FA、邊界元素法 BEM)，所模擬之結果更準確；由此可證實本模式可應用於模擬波浪受結構物影響之適用性。

誌謝

國科會補助計畫，NSC 101-2628-E-022 -001-MY2。

參考文獻

- 許泰文 (2003)。近岸水動力學。台北市：成陽。
- 黃清哲、董志明、郭金棟 (1995)，非線性波浪通過潛堤之變形，第十七屆海洋工程研討會暨 1995 兩岸港口及海岸開發研討會論文集，783-799。
- 黃大佑 (2012)，以無網格方法模擬海底崩移所造成之波浪傳遞與溯升，成功大學水利及海洋工程學系碩博士班學位論文，20-25。
- Beji, S., & Battjes, J. (1993). Experimental investigation of wave propagation over a bar. *Coastal Engineering*,

19 (1), 151-162.

Beji, S., & Battjes, J. (1994). Numerical simulation of nonlinear wave propagation over a bar. *Coastal Engineering*, 23 (1), 1-16.

Chorin, A.J. (1969). On the convergence of discrete approximations to the Navier-Stokes equations. *Math. Comp*, 23 (106), 341-353.

Huang, C.J., & Dong, C.M. (1999). Wave deformation and vortex generation in water waves propagating over a submerged dike. *Coastal Engineering*, 37 (2), 123-148.

Ohyama, T., Beji, S., Nadaoka, K., & Battjes, J.A. (1994). Experimental verification of numerical model for nonlinear wave evolutions. *Journal of waterway, port, coastal, and ocean engineering*, 120 (6), 637-644.

Popinet, S. (2003). Gerris: a tree-based adaptive solver for the incompressible Euler equations in complex geometries. *Journal of Computational Physics*, 190 (2), 572-600.

Yiu, K., Greaves, D., Cruz, S., Saalehi, A., & Borthwick, A. (1996). Quadtree grid generation: information handling, boundary fitting and CFD applications. *Computers & fluids*, 25 (8), 759-769.

The development of an adaptive quadtree numerical wave tank

*I-Yin Chen Chia-Cheng Tasi**

No.142, Haijhuan Rd., Nanzih Dist., Kaohsiung City 81157, Taiwan (R.O.C.)

* tsaichiacheng@mail.nkmu.edu.tw

ABSTRACT

This study develops an adaptive-quadtree and volume-of-fluid method to simulate a two-dimensional viscous numerical wave tank for the deformation of waves propagating over structures. The numerical results are compared with experimental data and numerical data in order to confirm the validity of the numerical model. The preliminary results are in good agreement by Beji and Battjes (1994). This model can be further applied to other bed topography and structures which are currently under investigation.

Keywords: adaptive quadtree; volume of fluid; numerical wave tank